SAT ist NP-vollständig (cont)

- $\rightarrow$ Es gibt **NP**-vollständige Probleme.
- Reduktion $L \leq_p$ SAT ist strukturerhaltend: löst zwar das Problem $x \in L$ nicht, aber wandelt es in andere Form um. $\rightarrow$ Richtung der Reduktion!
- Die SAT Instanzen, die bei der Reduktion entstehen können, sind nur eine kleine Teilmenge der möglichen SAT Formeln. Da aber manche von ihnen vermutlich schwierig sind, enthält das allgemeine Problem SAT eben schwierige Problem, und ist daher schwierig.
- Entscheidungs- vs. Funktions-Probleme:
  wenn eines **NP**-vollständig, dann auch das andere.
  $\rightarrow$ Erweiterung des Begriffs der **NP**-Vollständigkeit.

Alternative (äquivalente) Definition von NP

Definition: $L \in$ **NP** genau dann wenn $\exists M$ polynomiell-zeitbeschränkte TM und $\exists c \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall x \in \Sigma^*$

$$x \in L \Leftrightarrow \left(\exists y \in \Sigma^* \quad |y| = O(|x|^c) \wedge M(x,y) = \texttt{wahr} \right)$$

y: polynomiell beschränkter und polynomiell überprüfbarer Beweis (auch: Zertifikat) auf deterministischer TM.

- $\rightarrow$ Polynomielle Überprüfbarkeit eines Beweises statt Nichtdeterminismus
- **NP**-hart, **NP**-Vollständigkeit, ... : Terminologie geht auf Knuth (TEX, The Art of Computer Programming) zurück
- $\rightarrow$ PET-Probleme (Lin; Knuth 1974)
- Knuth: polynomielle Transformation, aber
  $\rightarrow$ polynomielle Reduktion hat sich doch durchgesetzt

Weitere NP-vollständige Probleme

$\rightarrow$ Ab nun sind die Beweise einfacher: $L \in$ **NP** zusammen mit SAT $\leq_p L$ (oder jede andere **NP**-vollständige Sprache) reichen, um die **NP**-Vollständigkeit von L zu beweisen.

- Man zeigt dadurch, daß man ein beliebiges Problem in **NP** lösen könnte, indem man es (mit nur geringem Mehraufwand) auf die Frage $x \in L\,?$ reduziert.
- L muß also mindestens genauso schwer wie die schwersten Probleme in **NP** sein.
- Denn wäre L leicht (= in polynomieller Zeit zu beantworten), so könnte man ja jedes Problem in **NP** (also auch die schwersten darunter) schnell (polynomiell) in eine Frage $x \in L\,?$ umwandeln, darauf schnell die Antwort finden, und das ursprüngliche angeblich schwere Problem so leicht lösen $\rightarrow$ Widerspruch.

Definition: 3CNF (auch 3SAT genannt)

Gegeben: Eine Boolsche Formel F in konjunktiver Normalform (CNF) mit höchstens 3 Literalen pro Klausel.
Beispiel: $(a) \wedge (b) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee c)$.
Gefragt: Ist F erfüllbar?

Theorem: 3CNF ist **NP**-vollständig.

Beweis:
Membership: Guess und check Argument $\surd$
Hardness: Wir zeigen SAT $\leq_p$ 3CNF.

Das bedeutet: Wir müssen ein polynomielles Verfahren angeben, das eine beliebige Boolsche Formel F in eine 3CNF Formel F' umformt, sodaß gilt

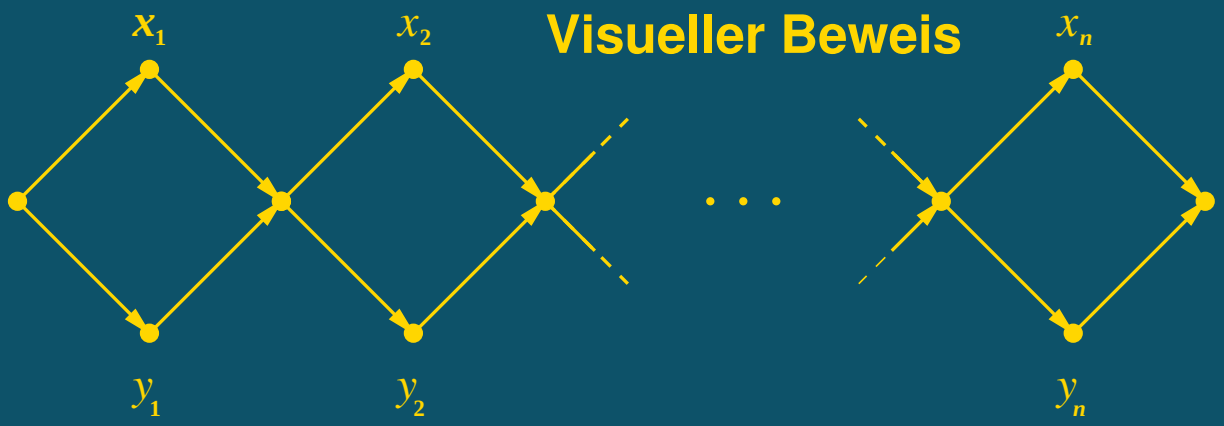
F ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ F' ist erfüllbar.

Erstes Problem: Äquivalente Umgewandlung CNF $\leftrightarrow$ DNF hat i.a. exponentiellen Aufwand, weiters werden nicht notwendigerweise Klauseln mit nur 3 Literalen erzeugt.

Beispiel: $(x_1 \vee y_1) \wedge (x_2 \vee y_2) \wedge \cdots \wedge (x_n \vee y_n) \equiv$

$$\left.\begin{array}{r} (x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \wedge x_n) \\ \vee\ (y_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \wedge x_n) \\ \vee\ (x_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \wedge x_n) \\ \vdots \\ \vee\ (x_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \wedge y_n) \\ \vee\ (y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \wedge y_n) \end{array}\right\} 2^n$$

Visueller Beweis



Lösung: Wir zeigen nur Erfüllbarkeitsäquivalenz und führen dazu neue Variable ein. Die Umformung geschieht in mehreren Schritten. Beispiel: $F = \neg(\neg(x_1 \vee \neg x_3) \vee x_2)$.

1. Anwendung der Regeln von DeMorgan, um alle Negationszeichen zu den Variablen zu verschieben.
   $\rightarrow ((x_1 \vee \neg x_3) \wedge \neg x_2)$. Aufwand: $O(n)$.
2. Wir ordnen jedem $\wedge$ und $\vee$ eine neue Variable $\in \{y_0, y_1, \ldots\}$ zu.
   $\rightarrow ((x_1 \overset{y_1}{\vee} \neg x_3) \overset{y_0}{\wedge} \neg x_2)$. Aufwand: $O(n^3)$.
3. Wir klammern so um, daß nur noch binäre Ausdrücke mit $\wedge$ und $\vee$ vorhanden sind und ordnen jedem solchen Ausdruck $(a \overset{y_j}{\circ} b)$ mit $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ und $a, b \in \{x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots\}$, eine Teilformel der Form

$$(y_j \leftrightarrow (a \circ b))$$

▷

zu. Alle diese Formeln sowie y_0 werden mit $\wedge$ zu einer neuen Formel F_1 verknüpft.
$\rightarrow F_1 = [y_0] \wedge [y_0 \leftrightarrow (y_1 \wedge \neg x_2)] \wedge [y_1 \leftrightarrow (x_1 \vee \neg x_3)]$.
Aufwand: $O(n)$.
$\rightarrow F$ und F_1 sind erfüllbarkeitsäquivalent.

4. Jeder Ausdruck $[\ldots]$ in F_1 wird nun in CNF umgeformt:
$[a \leftrightarrow (b \vee c)] \mapsto (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg c)$
$[a \leftrightarrow (b \wedge c)] \mapsto (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)$
Aufwand: $O(n)$.

Wir erhalten also die gewünschte 3CNF Formel

$$\rightarrow \quad F' = y_0 \wedge (\neg y_0 \vee y_1) \wedge (\neg y_0 \vee \neg x_2) \wedge (y_0 \vee \neg y_1 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee \neg x_1) \wedge (\neg y_1 \vee x_1 \vee \neg x_3) \wedge (y_1 \vee x_3)$$

$\rightarrow$ Gesamtaufwand ist polynomiell, damit haben wir SAT $\leq_p$ 3CNF gezeigt. $\surd$

$\triangleright$

3CNF (cont)

- Richtung der Reduktion; Gadget-Strukturerhaltung
- Vergleich mit SAT **NP**-Vollständigkeitsbeweis
- 4CNF, 5CNF, ...
- 3DNF, ... , 2CNF, HORNSAT

Definition: HORNSAT: Erfüllbarkeit von CNF Formel F, dabei pro Klausel höchstens ein positives Literal.
Beispiel: $(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$, $(\neg x_1 \vee \neg x_3)$, und x_2 sind HORN, $(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ ist nicht HORN.

- $(\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg \ldots \vee z) \equiv ((a \wedge b \wedge c \wedge \ldots) \rightarrow z)$
- $[\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg \ldots] \equiv [(a \wedge b \wedge c \wedge \ldots) \rightarrow \texttt{falsch}]$
- $(z) \equiv (\texttt{wahr} \rightarrow z)$ $\quad \rightsquigarrow$ Prolog

HORNSAT

Theorem: HORNSAT $\in$ **P** (daher vermutlich nicht . . .)

Beweis: polynomieller $\rightarrow$

Algorithmus HORNSAT(F)
$W := \{\}$ (* Kumulator für **wahre** Variablen *)
repeat
  if $\exists((x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) \rightarrow y) \in F$, y Variable
    sodaß für alle x_i gilt daß $x_i \in W$ aber $y \notin W$,
  then $W := W \cup \{y\}$
until W ändert sich nicht mehr (* endet! *)
if $\forall[(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) \rightarrow$ **falsch**$] \in F$
    $\exists x_i$, sodaß $x_i \notin W$ (* endet ebenfalls! *)
then return F ist erfüllbar (durch W)
else return F ist unerfüllbar. $\surd$

Definition: MAX2SAT (auch MAX2CNF genannt)

Gegeben: Eine Formel F in 2CNF und eine Zahl K.
Gefragt: Gibt es eine Wahrheitsbelegung,
sodaß mindestens K Klauseln von F erfüllt sind?

Theorem: MAX2SAT ist **NP**-vollständig.

Beweis:
Membership: Guess und check Argument $\surd$
Hardness: Wir zeigen 3CNF $\leq_p$ MAX2SAT.

Das bedeutet: Wir müssen ein polynomielles Verfahren angeben, das eine beliebige 3CNF Formel F in ein MAX2SAT-Problem $< F', K >$ umformt, sodaß gilt

F ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ mind. K Klauseln von F' sind erfüllbar. $\triangleright$

MAX2SAT (cont)

Sei $F \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{i=1}^{m} (x_i \vee y_i \vee z_i)$ eine beliebige 3CNF Formel, notfalls mit $x_i = z_i$, oder sogar $x_i = y_i$.

Dann sei $F' \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{i=1}^{m} G_i$, wobei G_i folgendes Gadget ist:

$$G_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c} (x_i) \wedge (y_i) \wedge (z_i) \wedge (w_i) \wedge \\ (\neg x_i \vee \neg y_i) \wedge (\neg y_i \vee \neg z_i) \wedge (\neg z_i \vee \neg x_i) \wedge \\ (x_i \vee \neg w_i) \wedge (y_i \vee \neg w_i) \wedge (z_i \vee \neg w_i) \end{array}$$

- Angenommen, x_i, y_i und z_i sind alle **`wahr`**, dann sind 7 Klauseln von G_i erfüllbar.
- Angenommen, x_i und y_i sind **`wahr`**, dann sind ebenfalls 7 Klauseln von G_i erfüllbar.
- Angenommen, nur x_i ist **`wahr`**, dann sind ebenfalls 7 Klauseln von G_i erfüllbar.

▷

- Wenn x_i, y_i und z_i **falsch** sind, dann sind nur noch höchstens 6 Klauseln von G_i erfüllbar.
- Wegen der Symmetrie der Literale x_i, y_i und z_i deckt dies alle möglichen Fälle ab.
- Daher setzen wir $K \stackrel{\text{def}}{=} 7m$:

$\Rightarrow$) Angenommen, F ist erfüllbar. Dann ist in jedem $(x_i \vee y_i \vee z_i)$ in F mindestens ein Literal **wahr** und daher in jedem G_i 7 Klauseln erfüllbar, in ganz F' also $7m$.

$\Leftarrow$) Falls in F' $7m$ Klauseln erfüllbar sind, dann muß in jedem G_i mindestens ein Literal aus x_i, y_i und z_i **wahr** sein, und daher muß F erfüllbar sein.

- Da die Formel F' genau $10m$ Klauseln mit maximaler Größe 2 hat, ist die Konstruktion sicher in polynomieller Zeit durchführbar. $\surd$

Definition: CLIQUE (Maxclique, vollständiger Subgraph)

Gegeben: (ungerichteter) Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$
Gefragt: Besitzt G eine Clique der Größe k? (Eine Clique der Größe k ist eine Teilmenge V' der Knotenmenge V mit $|V'| = k$, sodaß $\forall u, v \in V'$ gilt: $\{u, v\} \in E$).

Theorem: CLIQUE ist **NP**-vollständig.

Beweis:
Membership: Guess und check Argument $\surd$
Hardness: Wir zeigen 3CNF $\leq_p$ CLIQUE.

Das bedeutet: Wir müssen ein polynomielles Verfahren angeben, das eine beliebige 3CNF Formel F in ein CLIQUE-Problem $< G, k >$ umformt, sodaß gilt

F ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ G hat eine Clique der Größe k

CLIQUE (cont)

Sei $F \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{i=1}^{m}(z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee z_{i,3})$ eine beliebige 3CNF Formel (notfalls aufgestockt wie beim MAX2SAT Beweis, um auf exakt 3 Literale pro Klausel zu kommen), wobei

$$z_{i,j} \in \{x_1, x_2, \dots\} \cup \{\neg x_1, \neg x_2, \dots\}$$

Ex: $F = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

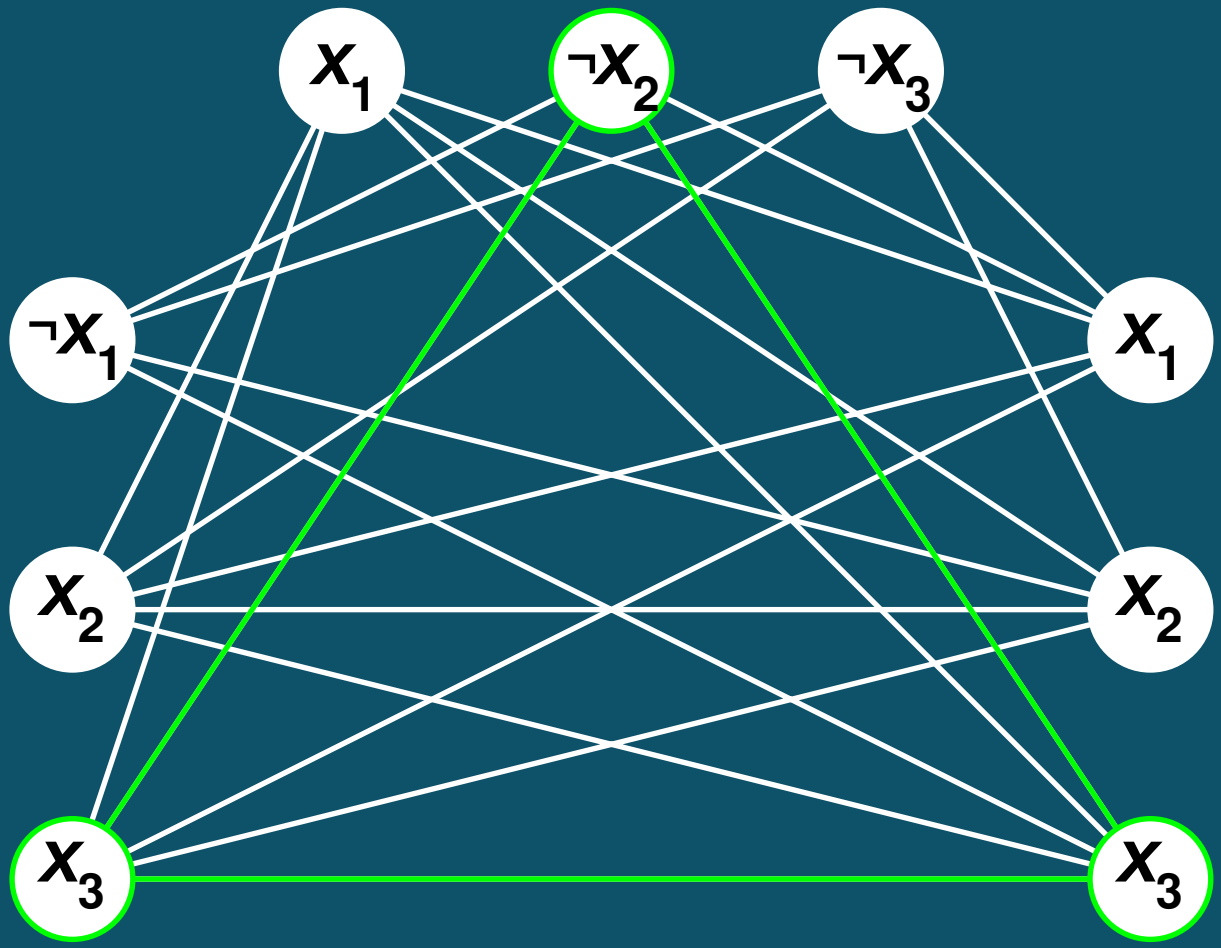
Dann sei F ein Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$ zugeordnet:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (m,1), (m,2), (m,3)\}$$

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{(i,j), (p,q)\} \middle| i \neq p \text{ und } z_{i,j} \neq \neg z_{p,q} \right\}$$

$$k \stackrel{\text{def}}{=} m$$

Ex: $F = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ wird zB durch $x_1 =$ **falsch**, $x_2 =$ **falsch** und $x_3 =$ **wahr** erfüllt. Eine entsprechende Clique:



CLIQUE (cont)

Es gilt nun: F ist erfüllbar durch eine Belegung B

- $\Leftrightarrow$ es in jeder Klausel ein Literal gibt, das unter B den Wert **`wahr`** hat, zB $z_{1,j_1}, z_{2,j_2}, \ldots, z_{m,j_m}$
- $\Leftrightarrow$ es Literale $z_{1,j_1}, z_{2,j_2}, \ldots, z_{m,j_m}$ gibt, die paarweise nicht komplementär ($z_{i,j} \neq \neg z_{p,q}$) sind.
- $\Leftrightarrow$ es Knoten $(1, j_1), (2, j_2), \ldots, (m, j_m)$ in G gibt, die paarweise verbunden ($z_{i,j} \neq \neg z_{p,q}$) sind.
- $\Leftrightarrow$ es eine Clique der Größe $k = m$ in G gibt.

Die Konstruktion ist sicher polynomiell machbar. $\surd$

Definition: INDEPENDENT SET (Max . . .)

Gegeben: (ungerichteter) Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$

Gefragt: Besitzt G ein Independent Set der Größe k?

(Ein Independent Set der Größe k ist eine Teilmenge V' der Knotenmenge V mit $|V'| = k$, sodaß $\forall u, v \in V'$ gilt: $\{u, v\} \notin E$).

Theorem: INDEPENDENT SET ist **NP**-vollständig.

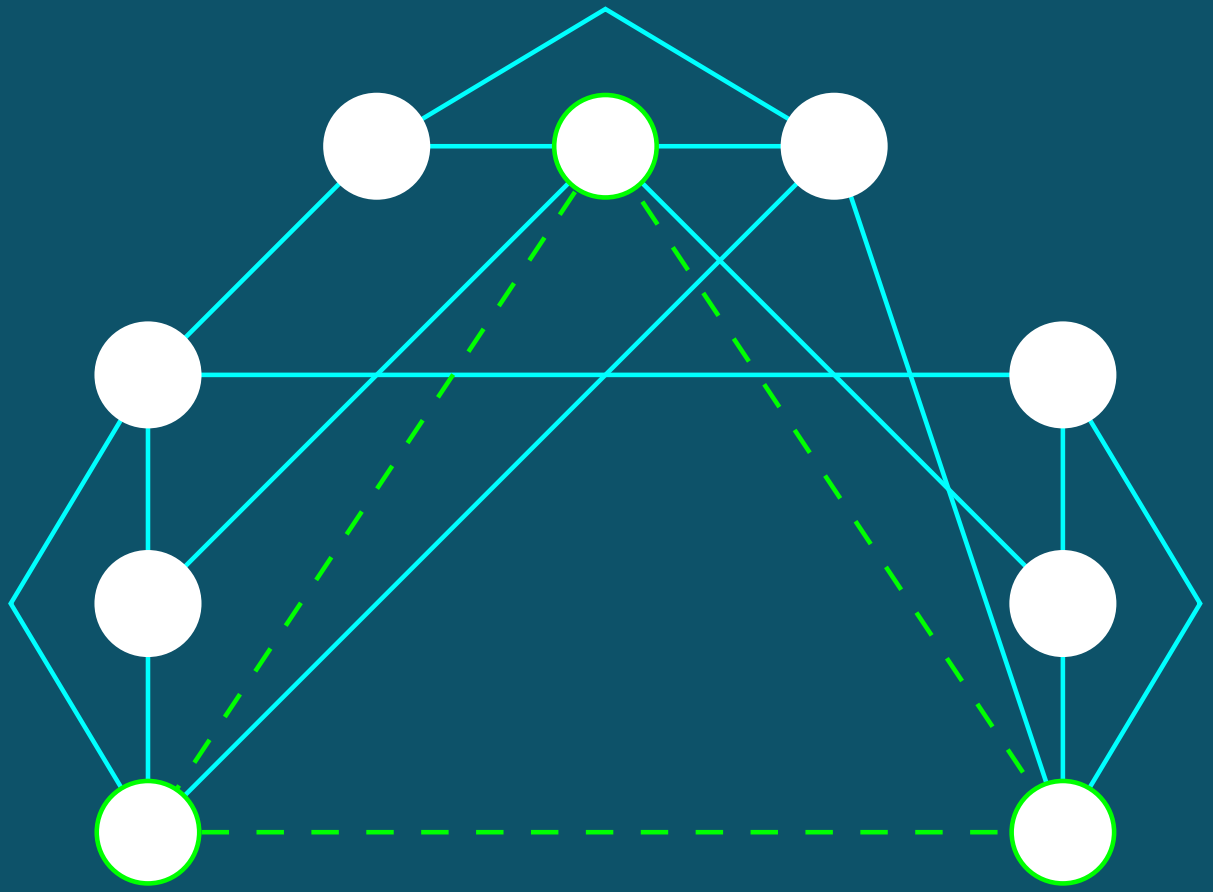
Beweis:

Membership: Guess und check Argument $\surd$

Hardness: CLIQUE $\leq_p$ INDEPENDENT SET.

Bemerkung: Es genügt, den Graphen $G = (V, E)$ des CLIQUE-Problems $< G, k >$ zum Graphen $G' = (V, \overline{E})$ zu invertieren ($\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{u, v\} \notin \overline{E}$), um das INDEPENDENT SET-Problems $< G', k >$ zu bekommen. $\surd$ $\triangleright$

Invertierter Beispielgraph aus dem Beweis für Clique mit Independent Set der Größe 3:



Definition: VERTEX COVER (Node Cover, Min ...)

Gegeben: (ungerichteter) Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$

Gefragt: Besitzt G einen Vertex Cover der Größe k? (Ein Vertex Cover der Größe k ist eine Teilmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| = k$, sodaß $\forall \{u, v\} \in E$ gilt: $u \in V'$ oder $v \in V'$).

Theorem: VERTEX COVER ist **NP**-vollständig.

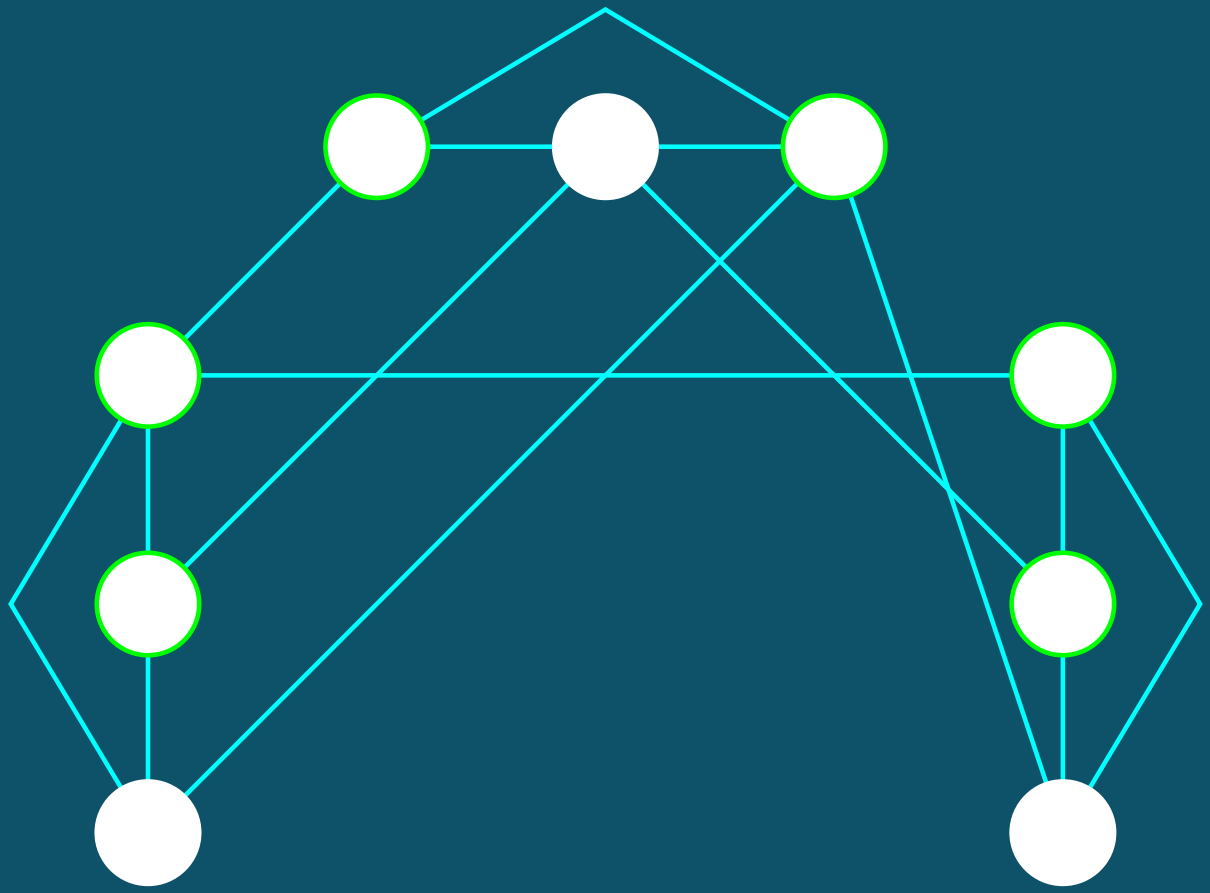
Beweis:

Membership: Guess und check Argument $\surd$

Hardness: INDEPENDENT SET $\leq_p$ VERTEX COVER.

Bemerkung: I ist ein Independent Set der Größe i des Graphen $G = (V, E) \Leftrightarrow V' \stackrel{\text{def}}{=} V - I$ ist ein Vertex Cover der Größe $k \stackrel{\text{def}}{=} |V| - i$ von G. $\surd$

Beispielgraph aus Beweis für Independent Set mit Vertex Cover der Größe 6:



Definition: SUBSET SUM (Knapsack, Rucksack)

Gegeben: Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$

Gefragt: Gibt es $I \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = b$?

Theorem: SUBSET SUM ist **NP**-vollständig.

Beweis:

Membership: Guess und check Argument $\surd$

Hardness: 3CNF $\leq_p$ SUBSET SUM.

Sei $F \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{i=1}^{m} (z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee z_{i,3})$ eine beliebige 3CNF Formel wobei $z_{i,j} \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \{\neg x_1, \neg x_2, \ldots, \neg x_n\}$.
Dann ist die Zahl b gegeben durch (zb im Dezimalsystem)

$$b \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{444\ldots444}_{m}\underbrace{11\ldots11}_{n}$$

Falls zB F aus 3 Klauseln besteht und darin 5 Variablen vorkommen, so ist $b = 444\,11111$.

zB $F = (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_5 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_2 \vee \neg x_5)$

Wir müssen noch die Zahlen a_i definieren (4 Klassen):

- (1) Positive Variablenvorkommen (inkl. Anzahl):

$$\begin{aligned} v_1 &= 100\ \ 10000 \\ v_2 &= 000\ \ 01000 \\ v_3 &= 000\ \ 00100 \\ v_4 &= 010\ \ 00010 \\ v_5 &= 110\ \ 00001 \end{aligned}$$

- (2) Negative Variablenvorkommen (inkl. Anzahl):

$$\begin{aligned} v'_1 &= 010\ \ 10000 \\ v'_2 &= 002\ \ 01000 \\ v'_3 &= 100\ \ 00100 \\ v'_4 &= 000\ \ 00010 \\ v'_5 &= 001\ \ 00001 \end{aligned}$$

- (3) Ausgleichszahlen (falls ein Literal **falsch**):

$$c_1 = 100\ 00000$$
$$c_2 = 010\ 00000$$
$$c_3 = 001\ 00000$$

- (4) Ausgleichszahlen (falls zwei Literale **falsch**):

$$d_1 = 200\ 00000$$
$$d_2 = 020\ 00000$$
$$d_3 = 002\ 00000$$

- Es gibt keine Ausgleichszahlen für den Fall, daß drei Literale **falsch** sind :-)
- $\exists$ erfüllende Belegung $B \Leftrightarrow$
  $\exists$ Auswahl A der Zahlen, die sich zu b aufsummiert:

$$x_i \text{ in } B \ \textbf{wahr} \Leftrightarrow v_i \text{ in } A$$
$$x_i \text{ in } B \ \textbf{falsch} \Leftrightarrow v'_i \text{ in } A$$

▷

- Da hinterer Teil von $b = 444\ 11111$ nur aus Einsen besteht kann nur entweder v_i oder v'_i in A sein; einer davon muß aber drin sein, da die anderen Variablen an der entsprechenden Stelle alle eine Null stehen haben.
- Bsp: $B = \{x_1, x_4\}$ (andere **`falsch`**) ergibt Auswahl $v_1,\ v'_2,\ v'_3,\ v_4,\ v'_5$. Summe davon ist 213 11111 (wichtig: im vorderen Teil sind alle größer als Null, da die Ausgleichszahlen nur Zahlen größer als Null ausgleichen können, und hinten sind alle Eins, dh alle Variablen haben einen Wert zugewiesen bekommen).
- Durch Hinzunehmen von geeigneten Ausgleichzahlen, in diesem Fall d_1, c_2, d_2, c_3, erhalten wir die gewünschte Summe $b = 444\ 11111$.
- Da es keine Überträge zwischen den Stellen gibt, „funktioniert“ der Beweis in beide Richtungen. $\surd$