Grundlagen der Logik

Denken Menschen logisch?

- Selektionsaufgabe nach Watson (1966):

  Gegeben sind vier Karten von denen jede auf der einen Seite mit einem Buchstaben, auf der anderen Seite mit einer Zahl beschriftet sind

- Beispiel:

  E **K** **4** **7**

- **Regel**: Wenn auf der einen Seite der Karte ein Vokal steht, dann steht auf der anderen Seite eine gerade Zahl.

- **Aufgabe**: Welche Karten *müssen* für die Überprüfung der Regel umgedreht werden?

Bedeutung der Logik in der AI

- formales System für Modellierung und Wissensrepräsentation
- Grundlage für die Beschreibung der Semantik anderer Wissensrepräsentationsmechanismen
- Grundlage für logisches Schließen
- Logische Kalküle haben wohldefinierte Syntax und Semantik, es gibt mechanisierbare Beweistechniken
- Logischer Kalkül wird charakterisiert duch:
  - Regeln (z.B. Grammatik), die bestimmen, was wohlgeformte Formeln sind
  - Axiome, eine Menge von Formeln
  - Schluß- und Ableitungsregeln
- Es existieren viele verschiedene Kalküle: z.B. für Aussagen-, Prädikaten- und Modallogiken

Aussagenlogik (Propositionale Logik)

Aussagenlogik formalisiert das Umgehen mit "Aussagen", die *entweder wahr oder falsch* sein können. Z.B. "Auf der ersten Karte steht ein Vokal"

Syntax: Formeln werden auf folgende Weise gebildet:

- Vokabular: *Konstanten* $\top$ und $\bot$ (wahr und falsch), *Aussagensymbole* $a, b, \ldots$ (aufzählbare Menge), *logische Verknüpfungen*: $\neg$ (einstellige Negation), $\wedge$ (Konjunktion), $\vee$ (Disjunktion), $\rightarrow$ (Implikation), $\leftrightarrow$ (Äquivalenz)

- Aussagenlogische Formeln:
  1. Eine Konstante oder ein Aussagensymbol
  2. Für beliebige Formeln ϕ, ψ sind $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \psi$ und $\phi \leftrightarrow \psi$ Formeln
  3. Alle Formeln werden nach 1. oder 2. gebildet

- Präzedenz der Verknüpfungen in o.a. Reihenfolge. Falls nötig werden Klammern verwendet

Aussagenlogik: Semantik

- Eine aussagenlogische Formel erhält ihre Bedeutung durch Zuweisung von Wahrheitswerten (w: wahr, f: falsch) zu den Aussagensymbolen

- Eine **Interpretation** $\mathcal{I}$ ist eine Abbildung der Symbole in die Menge der Wahrheitswerte {w, f}

- Die Semantik der Verknüpfungen ist eine Funktion auf Wahrheitswerten. Dies kann z.B. in Form einer Wahrheitstabelle angegeben werden:

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$	$\phi \rightarrow \psi$
w	w	w	w
w	f	w	f
f	w	w	w
f	f	f	w

- Dadurch wird die Interpretation von Symbolen erweitert auf die Interpretation von Formeln ϕ: $\mathcal{I}$ erfüllt ϕ ($\mathcal{I} \models \phi$), wenn ϕ wahr ist unter $\mathcal{I}$

Aussagenlogik: Semantik (2)

- Eine (aussagenlogische) Formel ϕ heißt:
  - **erfüllbar**, wenn es $\mathcal{I}$ gibt, die ϕ erfüllt
  - **unerfüllbar**, wenn ϕ nicht erfüllbar ist
  - **falsifizierbar**, wenn es $\mathcal{I}$ gibt, die ϕ nicht erfüllt
  - **gültig** (Tautologie), wenn ϕ für alle $\mathcal{I}$ wahr ist

- Zwei Formeln heißen **logisch äquivalent** ($\phi \equiv \psi$), wenn für alle $\mathcal{I}$ gilt: $\mathcal{I} \models \phi$ gdw. $\mathcal{I} \models \psi$

- Eine Menge von Formeln Θ wird von $\mathcal{I}$ erfüllt gdw. $\mathcal{I}$ alle $\phi \in \Theta$ erfüllt.

- **Semantische Folgerung**: ϕ ist eine semantische Folgerung von Θ, wenn jede Interpretation die Θ wahr macht auch ϕ wahr macht: $\Theta \models \phi$

$\leadsto$ Können wir $\Theta \models \phi$ entscheiden ohne alle Interpretationen betrachten zu müssen?

Aussagenlogik: Äquivalenzen

Idempotenz	$\phi \vee \phi$	$\equiv$	ϕ
	$\phi \wedge \phi$	$\equiv$	ϕ
Kommutativität	$\phi \vee \psi$	$\equiv$	$\psi \vee \phi$
	$\phi \wedge \psi$	$\equiv$	$\psi \wedge \phi$
	$\phi \leftrightarrow \psi$	$\equiv$	$\psi \leftrightarrow \phi$
Assoziativität	$(\phi \vee \psi) \vee \rho$	$\equiv$	$\phi \vee (\psi \vee \rho)$
	$(\phi \wedge \psi) \wedge \rho$	$\equiv$	$\phi \wedge (\psi \wedge \rho)$
Absorption	$(\phi \vee \psi) \wedge \phi$	$\equiv$	ϕ
	$(\phi \wedge \psi) \vee \phi$	$\equiv$	ϕ
Distributivität	$\phi \vee (\psi \wedge \rho)$	$\equiv$	$(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \rho)$
	$\phi \wedge (\psi \vee \rho)$	$\equiv$	$(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \rho)$
Doppelte Neg.	$\neg\neg\phi$	$\equiv$	ϕ
De Morgan	$\neg(\phi \vee \psi)$	$\equiv$	$\neg\phi \wedge \neg\psi$
	$\neg(\phi \wedge \psi)$	$\equiv$	$\neg\phi \vee \neg\psi$
Tautologie	$\phi \vee \top$	$\equiv$	$\top$
	$\phi \wedge \top$	$\equiv$	ϕ
Unerfüllb.	$\phi \vee \bot$	$\equiv$	ϕ
	$\phi \wedge \bot$	$\equiv$	$\bot$
Implikation	$\phi \rightarrow \psi$	$\equiv$	$\neg\phi \vee \psi$
Äquivalenz	$\psi \leftrightarrow \psi$	$\equiv$	$(\phi \leftarrow \psi) \wedge (\psi \leftarrow \phi)$

Aussagenlogik: Normalformen

- **Literale**: Symbole und negierte Symbole
- **Klausel**: Disjunktion von Literalen
- Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform** (KNF), wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist, z.B.:

  $$(L_{11} \vee \ldots \vee L_{1n_1}) \wedge \ldots \wedge (L_{m1} \vee \ldots \vee L_{mn_m})$$

  $\rightsquigarrow$ geeignet zur Bestimmung der Gültigkeit
- Eine Formel ist in **disjunktiver Normalform** (DNF), wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist, z.B.:

  $$(L_{11} \wedge \ldots \wedge L_{1n_1}) \vee \ldots \vee (L_{m1} \wedge \ldots \wedge L_{mn_m})$$

  $\rightsquigarrow$ geeignet zur Bestimmung der Erfüllbarkeit
- Satz: Jede Formel kann in eine logisch äquivalente Formel in KNF bzw. DNF umgewandelt werden.

Aussagenlogik: Resolution

- Resolution ist eine Methode zur Bestimmung der Unerfüllbarkeit einer aussagenlogischen Formel

- Das Resolutionsprinzip:
  - Gegeben eine Menge von Klauseln Φ (entspricht einer Formel in KNF) und zwei Klauseln $\rho, \sigma \in \Phi$, so daß $\rho = \{L, \rho'\}$ und $\sigma = \{\neg L, \sigma'\}$, wobei L und $\neg L$ komplementäre Literale sind.
  - Mit Resolution läßt sich aus den Elternklauseln ρ und σ die Klausel $\tau = \{\rho', \sigma'\}$ ableiten
  - Kann die leere Klausel mittels Resolution aus Φ abgeleitet werden, so ist Φ unerfüllbar

- Eigenschaften der Resolution:
  - Die Resolvente ist nicht äquivalent mit den Elternklauseln, folgt aber aus diesen
  - Resolution ist **widerlegungsvollständig**, d.h., wenn Φ unerfüllbar ist, so läßt sich die leere Klausel mittels Resolution ableiten

Prädikatenlogik 1.Stufe (PL1)

- Erweiterung der Aussagenlogik um verschiedene Sprachelemente, die es ermöglichen, verschiedene Formen von Aussagen auszudrücken, z.B. daß:
  - Objekte in einer Beziehung zueinander stehen
  - eine Eigenschaft für alle Objekte gilt
  - es ein Objekt mit einer bestimmten Eigenschaft gibt.
  - Beispiel: "Alle Vögel haben Flügel"
    und "Tweety ist ein Vogel".
    Daraus sollte folgen: "Tweety hat Flügel"
- **Syntax**: Neue Sprachelemente (abzählbar viele):
  - *Variablensymbole* $x, y, z, \ldots$
  - n-stellige *Funktionssymbole* $f, g, h, \ldots$
    (0-stellige Funktionssymbole sind Konstanten)
  - n-stellige *Prädikatensymbole* $P, Q, R, \ldots$
    (0-stellige Prädikatensymbole sind Propositionen)
  - *Quantoren*: $\forall$ (Allquantor), $\exists$ (Existenzquantor)

Induktiver Aufbau der PL1

- Terme
  - Jede Variable ist ein Term
  - Sind $t_1 \ldots t_n$ Terme und ist f eine n-stellige Funktion, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term
  - Grundterme: Terme die keine Variablen enthalten

- Formeln
  - Sind $t_1 \ldots t_n$ Terme und ist P ein n-stelliges Prädikat, so ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine (atomare) Formel
  - Sind ϕ und ψ Formeln, dann sind auch $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \psi$ und $\phi \leftrightarrow \psi$ Formeln
  - Ist x eine Variable und ϕ eine Formel, dann sind $\forall x.\phi$ und $\exists x.\phi$ Formeln
  - Literale: atomare Formeln oder deren Negation

- Beispiel:
  Aus $\forall x.$*istVogel*$(x) \rightarrow$ *hatFlügel*(x) und *istVogel(Tweety)* folgt *hatFlügel(Tweety)*

Semantik der PL1

- Die Semantik der Terme und Formeln wird bestimmt durch Interpretation der verwendeten Symbole bezüglich einer Grundmenge $\mathcal{U}$

- Eine Interpretation $\mathcal{I}$ ist ein Paar $\langle \mathcal{U}, \mathcal{A} \rangle$, wobei $\mathcal{A}$ eine Abbildung der Symbole auf $\mathcal{U}$ ist
  - n-stelige Funktionssymbole f: $\mathcal{A}(f) : \mathcal{U}^n \mapsto \mathcal{U}$
  - n-stelige Prädikatensymbole P: $\mathcal{A}(P) \subseteq \mathcal{U}^n$
  - Interpretation wird auf Grundterme fortgesetzt: $\mathcal{A}(f(t_1 \ldots t_n)) = \mathcal{A}(f)(\mathcal{A}(t_1) \ldots \mathcal{A}(t_n))$

- Variablenbelegung α ordnet jeder Variablen einen Wert aus $\mathcal{U}$ zu. $\alpha[x/d]$: x wird ersetzt durch $d \in \mathcal{U}$

$\mathcal{I}, \alpha \models P(t_1, .., t_n)$ gdw $\langle \mathcal{A}(t_1), .., \mathcal{A}(t_n) \rangle \in \mathcal{A}(P)$

$\mathcal{I}, \alpha \models \neg\phi$	gdw	$\mathcal{I}, \alpha \not\models \phi$
$\mathcal{I}, \alpha \models \phi \wedge \psi$	gdw	$\mathcal{I}, \alpha \models \phi$ und $\mathcal{I}, \alpha \models \psi$
$\mathcal{I}, \alpha \models \phi \vee \psi$	gdw	$\mathcal{I}, \alpha \models \phi$ oder $\mathcal{I}, \alpha \models \psi$
$\mathcal{I}, \alpha \models \phi \rightarrow \psi$	gdw	$\mathcal{I}, \alpha \not\models \phi$ oder $\mathcal{I}, \alpha \models \psi$
$\mathcal{I}, \alpha \models \forall x.\phi$	gdw	für alle $d \in \mathcal{U}$: $\mathcal{I}, \alpha[x/d] \models \phi$
$\mathcal{I}, \alpha \models \exists x.\phi$	gdw	es gibt ein $d \in \mathcal{U}$ so daß $\mathcal{I}, \alpha[x/d] \models \phi$

Eigenschaften der Prädikatenlogik

- PL1 erlaubt es, Aussagen zu strukturieren und hat eine viel größere Ausdruckskraft als Aussagenlogik

- Prädikatenlogik ist unentscheidbar
  - Es gibt kein Verfahren mit dem für eine beliebige PL1 Formel entschieden werden kann, ob sie gültig ist.
  - Es gibt kein Verfahren mit dem für eine beliebige PL1 Formel entschieden werden kann, ob sie erfüllbar ist.

- Aber: Prädikatenlogik ist semi-entscheidbar
  - Es gibt ein Verfahren mit dem alle gültigen bzw. unerfüllbaren Formeln generiert werden können

- Spezialfall: Monadische Logik (nur einstellige Prädikatensymbole) ist entscheidbar

Nichtstandardlogiken: Modallogiken

- In der AI werden viele verschiedene Arten von Logiken eingesetzt, auch sog. Nichtstandardlogiken.
- Häufig verwendet und sehr nützlich sind die propositionalen Modallogiken
- Es lassen sich verschiedene intendierte Bedeutungen ausdrücken, die in klassischer Aussagenlogik und PL1 nicht möglich sind
  z.B. ein Agent weiß/glaubt, in der Zukunft gilt, möglicherweise gilt,...
- Erweiterung der Aussagenlogik um einen einstelligen **Modaloperator** $\Box$
- zusätzliche Syntax:
  - Ist ϕ eine Formel, so ist auch $\Box\phi$ eine Formel
  - $\neg\Box\neg\phi$ wird oft mit $\Diamond\phi$ bezeichnet

  $\rightsquigarrow$ $\Box$ und $\Diamond$ entsprechen ungefähr $\forall$ und $\exists$

Modallogik: Kripke Semantik

- Intuition: Formeln gelten in verschiedenen "Welten" die voneinander erreichbar sind oder nicht. Modaloperatoren ermöglichen es, Aussagen über gültige Formeln in anderen Welten zu machen
  - in jeder Welt können andere Formeln gelten
  - Beispiel: Gilt in meiner Welt $\Box\phi$, so bedeutet dies, daß in allen Welten die ich direkt erreichen kann ϕ gilt.
  - $\Diamond\phi$ bedeutet, daß in mindestens einer direkt erreichbaren Welt ϕ gilt.

- Erreichbarkeitsstruktur der Welten wird dargestellt mit einem *Kripke-Frame* $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, R \rangle$, wobei W eine Menge von Welten ist und $R \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ eine Relation über Welten

- Der Modaloperator hängt von der Relation R ab

- Es können auch verschiedene Modaloperatoren $\Box_i$ verwendet werden, jeweils mit eigener Relation R_i

Kripke Semantik (2)

- Frameaxiome und Relationen

ML	Axiom	Relation R
K	$\Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$	–
T	$\Box\phi \rightarrow \phi$	reflexiv
4	$\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$	transitiv
5	$\neg\Box\phi \rightarrow \Box\neg\Box\phi$	Euklidisch

- Modallogische Formeln lassen sich interpretieren mittels eines *Kripke Modells* $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \nu \rangle$, wobei ν eine Funktion ist, die allen Propositionen einen Wahrheitswert zuordnet

- Der Wahrheitswert von ϕ in einer Welt w bzgl. $\mathcal{M}$ ergibt sich aus dem induktiven Aufbau von ϕ, z.B.:

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, w \models a \text{ (Prop.)} & gdw. & \nu(w, a) = \top \\
\mathcal{M}, w \models \neg\phi & gdw. & \mathcal{M}, w \not\models \phi \\
\mathcal{M}, w \models \phi \wedge \psi & gdw. & \mathcal{M}, w \models \phi \text{ und } \mathcal{M}, w \models \psi \\
\mathcal{M}, w \models \phi \rightarrow \psi & gdw. & \mathcal{M}, w \not\models \phi \text{ oder } \mathcal{M}, w \models \psi \\
\mathcal{M}, w \models \Box\phi & gdw. & \text{f.alle } u \text{ mit } wRu\text{: } \mathcal{M}, u \models \phi \\
\mathcal{M}, w \models \Diamond\phi & gdw. & \text{exist. } u \text{ mit } wRu\text{: } \mathcal{M}, u \models \phi
\end{array}
$$